57期 高1 数学α 臨時休校課題2 解答

＜神戸大学 平成30年 前期＞

$\boxed{1}$

(1)

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\overrightarrow{a}-t\overrightarrow{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}}{2}-t\overrightarrow{b}=\left(\frac{1}{2}-t\right)\overrightarrow{b}+\frac{1}{2}\overrightarrow{c}$$

(2)

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}|\cdot\left|\overrightarrow{b}\right|\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\frac{1}{2}$$

$\angle\mathrm{PQR}=\dfrac{\pi}{2}$ より $\overrightarrow{\mathrm{QP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}=0$ だから

$$\left((1-t)\overrightarrow{a}-t\overrightarrow{b}\right)\cdot\left(\left(\frac{1}{2}-t\right)\overrightarrow{b}+\frac{1}{2}\overrightarrow{c}\right)=0$$

$$(1-t)\left(\frac{1}{2}-t\right)\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\frac{1}{2}(1-t)\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}$$
$$-t\left(\frac{1}{2}-t\right)\left|\overrightarrow{b}\right|^2-\frac{1}{2}t\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=0$$

$$\frac{1}{2}(1-t)\left(\frac{1}{2}-t\right)+\frac{1}{4}(1-t)$$
$$-t\left(\frac{1}{2}-t\right)-\frac{1}{4}t=0$$

$$(3t-2)(2t-1)=0$$

$$t=\frac{2}{3},\frac{1}{2}$$

(3) $t=\dfrac{1}{2}$ のとき

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{a}-\frac{1}{2}\overrightarrow{b},\quad\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{c}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{QP}}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right|=\frac{1}{2},\quad\left|\overrightarrow{\mathrm{QR}}\right|=\frac{1}{2}$$

よって, $\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{8}$.

$t=\dfrac{2}{3}$ のとき

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{a}-\frac{2}{3}\overrightarrow{b},\quad\overrightarrow{\mathrm{QR}}=-\frac{1}{6}\overrightarrow{b}+\frac{1}{2}\overrightarrow{c}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{QP}}\right|^2=\left|\frac{1}{3}\overrightarrow{a}-\frac{2}{3}\overrightarrow{b}\right|^2$$
$$=\frac{1}{9}|\overrightarrow{a}|^2-\frac{4}{9}\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\frac{4}{9}\left|\overrightarrow{b}\right|^2$$
$$=\frac{1}{9}-\frac{2}{9}+\frac{4}{9}=\frac{1}{3}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{QR}}\right|^2=\left|-\frac{1}{6}\overrightarrow{b}+\frac{1}{2}\overrightarrow{c}\right|^2$$
$$=\frac{1}{36}\left|\overrightarrow{b}\right|^2-\frac{1}{6}\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}+\frac{1}{4}|\overrightarrow{c}|^2$$
$$=\frac{1}{36}-\frac{1}{12}+\frac{1}{4}=\frac{7}{36}$$

よって

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{QP}}\right|=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad\left|\overrightarrow{\mathrm{QR}}\right|=\frac{\sqrt{7}}{6}$$

$$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{\sqrt{21}}{36}$$

以上より, $t=\dfrac{1}{2}$ のとき $\dfrac{1}{8}$, $t=\dfrac{2}{3}$ のとき $\dfrac{\sqrt{21}}{36}$

$\boxed{2}$

(1)

$$f'(x)=6(2x-1)^2$$

$$y-(2t-1)^3=6(2t-1)^2(x-t)$$

$$y=6(2t-1)^2\left(x-\frac{4t+1}{6}\right)$$

$y=0$ として $x=\dfrac{4t+1}{6}$

$$0=6(2t-1)^2\left(x-\frac{4t+1}{6}\right)$$

$t\neq=\dfrac{1}{2}$ より

$$x=\frac{4t+1}{6}$$

(2) (1) より

$$x_{n+1}=\frac{4x_n+1}{6}$$

変形して

$$x_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{2}{3}\left(x_n-\frac{1}{2}\right)$$

よって, 数列 $\left\{x_n-\dfrac{1}{2}\right\}$ は 初項 $s_1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{3}$, 公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列だから

$$x_n-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$x_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$\dfrac{3}{2}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}>0$ だから $x_n>\dfrac{1}{2}$

(3) (2) より

$$x_{n+1}-x_n=\frac{4x_n+1}{6}-x_n=-\frac{1}{3}x_n+\frac{1}{6}$$
$$=-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$|x_{n+1}-x_n|<\dfrac{3}{4}\times10^{-5}$ より

$$\left|-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right|<\frac{3}{4}\times10^{-5}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n<10^{-5}$$

$$\log_{10}\left(\frac{2}{3}\right)^n<\log_{10}10^{-5}$$

$$n(\log_{10}2-\log_{10}3)<-5$$

$$n>\frac{5}{\log_{10}3-\log_{10}2}$$

ここで

$$0.477-0.302<\log_{10}3-\log_{10}2<0.478-0.301$$

$$0.175<\log_{10}3-\log_{10}2<0.177$$

$$\frac{5}{0.177}<\frac{5}{\log_{10}3-\log_{10}2}<\frac{5}{0.175}$$

$$28.2\cdots < \frac{5}{\log_{10}3 - \log_{10}2} < 28.5\cdots$$

よって, $n \geqq 29$ より, 最小の n は $n = 29$.

$\boxed{3}$

(1) $x = 1$ を代入して

$$1 - a + b = 0$$

$$b = a - 1$$

$a = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, $b = 2, 3, 4, \cdots, 12$ だから

$$(a, b) = (3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 5)$$

$b = 2, 3, 4, 5$ となる目の出方はそれぞれ 1, 2, 3, 4 通りで, 合計 10 通り. よって, 求める確率は

$$\frac{10}{6^3} = \frac{5}{108}$$

(2) n を整数として, 2 つの解を $x = n, k$ とすると, 解と係数の関係より

$$n + k = a, \quad nk = b$$

a, n は整数だから $k = a - n$ も整数. また, $a > 0$, $b > 0$ より

$$n + k > 0, \quad nk > 0$$

n, k は和と積が正だから, ともに正である.

$1 \leqq a \leqq 6$ より $1 \leqq n + k \leqq 6$ だから, $n \leqq 3$ のとき n が 3 以下, $n > 3$ のとき k が 3 以下になる.

以上より, 解はすべて正の整数で, 少なくとも 1 つは 3 以下である.

(3) (2) より, 整数解を n $(n = 1, 2, 3)$ を持つ場合を考える.

(i) $n = 1$ のとき, (1) より

$$(a, b) = (3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 5)$$

(ii) $n = 2$ のとき,

$$4 - 2a + b = 0$$

$$b = 2(a - 2)$$

$$(a, b) = (3, 2), (4, 4), (5, 6), (6, 8)$$

(iii) $n = 3$ のとき,

$$9 - 3a + b = 0$$

$$b = 3(a - 3)$$

$$(a, b) = (4, 3), (5, 6), (6, 9)$$

(i), (ii), (iii) より

$$\begin{aligned}(a, b) = &(3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 5),\\ &(4, 4), (5, 6), (6, 8), (6, 9)\end{aligned}$$

目の出方はそれぞれ 1, 2, 3, 4, 3, 5, 5, 4 通りだから, 求める確率は

$$\frac{1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 5 + 5 + 4}{6^3} = \frac{27}{6^3} = \frac{1}{8}$$

＜神戸大学 平成 29 年 前期＞

$\boxed{1}$

(1)

$$2t^3 - 3t^2 + 1 = (t - 1)(2t^2 - t - 1) = (t - 1)^2(2t + 1)$$

(2)

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3x^2 + 6x - 3(t^2 - 1)\\ &= 3(x^2 + 2x - (t - 1)(t + 1))\\ &= 3(x - t + 1)(x + t + 1)\end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ とすると $x = t - 1, -t - 1$. $t > 0$ より, $t - 1 > -t - 1$ だから, 増減表は

x	$\cdots$	$-t-1$	$\cdots$	$t-1$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

$$\begin{aligned}&f(t - 1)\\ &= (t - 1)^3 + 3(t - 1)^2 - 3(t^2 - 1)(t - 1) + 2t^3 - 3t^2 + 1\\ &= (t - 1)^3 + 3(t - 1)^2 - 3(t + 1)(t - 1)^2 + (t - 1)^2(2t + 1)\\ &= (t - 1)^2(t - 1 + 3 - 3t - 3 + 2t + 1) = 0\end{aligned}$$

よって, 極小値 $f(t - 1) = 0$

(3) $t > 0$ だから, $-t - 1 < -1$, $t - 1 > -1$.

$$f(-1) = 2t^3, \quad f(2) = 2t^3 - 9t^2 + 27$$

$f(-1) < f(2)$ とすると

$$2t^3 < 2t^3 - 9t^2 + 27$$

$$t^2 < 3$$

$$-\sqrt{3} < t < \sqrt{3}$$

$-1 < t - 1 < 2$, つまり, $0 < t < 3$ のとき $m = f(t - 1)$.

$2 \leqq t - 1$, つまり, $3 \leqq t$ のとき $m = f(2)$.

$0 < t < \sqrt{3}$ のとき $M = f(2)$. $\sqrt{3} \leqq t$ のとき $M = f(-1)$.

よって

$$m = \begin{cases} f(t - 1) = 0 & (0 < t < 3) \\ f(2) = 2t^3 - 9t^2 + 27 & (3 \leqq t) \end{cases}$$

$$M = \begin{cases} f(2) = 2t^3 - 9t^2 + 27 & (0 < t < \sqrt{3}) \\ f(-1) = 2t^3 & (\sqrt{3} \leqq t) \end{cases}$$

$\boxed{2}$

(1) $f(x) = ax^2 + bx + c$ とすると, (i) より $f(1) = 4$ だから

$$a + b + c = 4 \quad \cdots ①$$

(ii) より

$$\int_{-1}^{2} ax^2 + bx + c\,dx = 15$$

$$\left[\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx\right]_{-1}^{2} = 15$$

$$3a + \frac{3}{2}b + 3c = 15$$

$$2a + b + 2c = 10 \quad \cdots ②$$

$① \times 2 - ②$ より

$$b = -2$$

(2) (1) より $b=-2$ だから, ①より $c=6-a$. よって,

$$f(x)=ax^2-2x+6-a=0$$

解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=\frac{2}{a},\quad \alpha\beta=\frac{6-a}{a}=\frac{6}{a}-1$$

よって

$$\alpha\beta=3(\alpha+\beta)-1$$

(3) 2 つの解 α, β を, $\alpha \leqq \beta$ とする. (2) の関係式を変形して

$$\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+1=0$$
$$(\alpha-3)(\beta-3)=8$$

$1 \leqq \alpha \leqq \beta$ より $-2 \leqq \alpha-3 \leqq \beta-3$ だから

$$(\alpha-3,\beta-3)=(1,8),(2,4)$$
$$(\alpha,\beta)=(4,11),(5,7)$$

$\alpha+\beta=\dfrac{2}{a}$ より

$$a=\frac{2}{15},\frac{1}{6}$$

よって

$$f(x)=\frac{2}{15}(x-4)(x-11),\quad f(x)=\frac{1}{6}(x-5)(x-7)$$

$\boxed{3}$

(1) P_2 が x 軸上にあるのは, $\overrightarrow{\mathrm{P_0P_2}}$ が $\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v_3}+\overrightarrow{v_4}$ のどちらかになるときで

$$\left(\frac{2}{4}\times\frac{1}{4}\right)\times 2=\frac{1}{4}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{P_0P_2}}$ は

$(2,2,2),(2,-2,-2),(-2,2,-2),(-2,-2,2)\cdots$①

$(2,0,0),(0,2,0),(0,0,2),(0,0,-2),(0,-2,0),(-2,0,0)\cdots$②

の 10 通りの場合があり, $\overrightarrow{\mathrm{P_2P_4}}$ も同じ 10 通りの場合がある. $\overrightarrow{\mathrm{P_0P_2}}\neq\overrightarrow{0}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{P_2P_4}}\neq\overrightarrow{0}$ だから, $\overrightarrow{\mathrm{P_0P_2}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{P_2P_4}}=0$ となる確率を求める.

(i) $\overrightarrow{\mathrm{P_0P_2}}$ が ①のとき. 条件をみたす $\overrightarrow{\mathrm{P_2P_4}}$ は存在しない.

(ii) $\overrightarrow{\mathrm{P_0P_2}}$ が ②のとき. $\overrightarrow{\mathrm{P_0P_2}}=(2,0,0)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{P_2P_4}}=(0,2,0),(0,0,2),(0,-2,0),(0,0,-2)$$

だから, 確率は

$$\frac{1}{8}\times\left(\frac{1}{8}\times 4\right)=\frac{1}{16}$$

$\overrightarrow{\mathrm{P_0P_2}}$ が残りの 5 通りのときも同様に確率はそれぞれ $\dfrac{1}{16}$ だから, $\overrightarrow{\mathrm{P_0P_2}}$ が ②のとき確率は

$$\frac{1}{16}\times 6=\frac{3}{8}$$

(i), (ii) より, 求める確率は $\dfrac{3}{8}$

(3) 4 点が同一平面上にないのは, $\overrightarrow{\mathrm{P_0P_1}}$, $\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}$, $\overrightarrow{\mathrm{P_2P_3}}$ がすべて異なるときだから, 確率は

$$1\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{8}$$

よって, 同一平面上にある確率は

$$1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$$

＜神戸大学 平成 28 年 前期＞

$\boxed{1}$

(1)

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{b}-\frac{1}{2}\overrightarrow{a}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}}{2}-\frac{1}{2}\overrightarrow{a}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{b}+\frac{1}{2}\overrightarrow{c}$$

(2) $\left|\overrightarrow{\mathrm{AS}}\right|:\left|\overrightarrow{\mathrm{SC}}\right|=k:1-k$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=(1-k)\overrightarrow{a}+k\overrightarrow{c}\cdots①$$

また, S は P, Q, R を通る平面上の点だから, s, t を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{PS}}=s\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+t\overrightarrow{\mathrm{PR}}$$

よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OS}}&=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PS}}\\&=\left(\frac{1}{2}-\frac{s}{2}-\frac{t}{2}\right)\overrightarrow{a}+\left(\frac{2}{3}s+\frac{t}{2}\right)\overrightarrow{b}+\frac{t}{2}\overrightarrow{c}\cdots②\end{aligned}$$

O, A, B, C は同一平面上にないから, ①, ② で $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ の係数を比較して

$$1-k=\frac{1}{2}-\frac{s}{2}-\frac{t}{2},\quad 0=\frac{2}{3}s+\frac{t}{2},\quad k=\frac{t}{2}$$

連立して解いて

$$s=-1,\quad t=\frac{4}{3},\quad k=\frac{2}{3}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AS}}\right|:\left|\overrightarrow{\mathrm{SC}}\right|=\frac{2}{3}:\frac{1}{3}=2:1$$

(3) OABC は 1 辺の長さが 1 の正四面体だから

$$|\overrightarrow{a}|=\left|\overrightarrow{b}\right|=|\overrightarrow{c}|=1$$

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=1\cdot1\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

また, (2) より $\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{a}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{c}$ だから

$$\overrightarrow{\mathrm{QS}}=\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{a}-\frac{2}{3}\overrightarrow{b}+\frac{2}{3}\overrightarrow{c}$$

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{QS}}\right|^2&=\left|\frac{1}{3}\overrightarrow{a}-\frac{2}{3}\overrightarrow{b}+\frac{2}{3}\overrightarrow{c}\right|^2\\&=\frac{1}{9}|\overrightarrow{a}|^2+\frac{4}{9}\left|\overrightarrow{b}\right|^2+\frac{4}{9}|\overrightarrow{c}|^2\\&\quad-\frac{4}{9}\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\frac{4}{9}\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}-\frac{8}{9}\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}\\&=\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}-\frac{2}{9}+\frac{2}{9}-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}\end{aligned}$$

よって, $\left|\overrightarrow{\mathrm{QS}}\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

$\boxed{2}$

(1) $g(x)=x^2+2ax+a$ とすると

$$g(x)=(x+a)^2-a^2+a$$

よって, $y=g(x)$ のグラフは頂点 $(-a,-a^2+a)$ で下に凸の放物線であり, $g\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$ より点 $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\right)$ と点 $(0,a)$ を通る. また, $-a^2+a=-a(a-1)$.

$0<a\leqq 1$ のとき, $-a<0$, $-a^2+a\geqq 0$ だから, $y=f(x)$ のグラフは図 (略) のようになる.

(頂点が第 2 象限にあり, $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\right)$ を通り, y 軸と $y=a$ で交わる下に凸の放物線)

$a>1$ のとき, $-a<0$, $-a^2+a<0$ だから, $y=f(x)$ のグラフは図 (略) のようになる.
(頂点が第 3 象限にあり, $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$ を通り, y 軸と $y=a>0$ で交わる下に凸の放物線の $y<0$ の部分を x 軸で折り返したグラフ)
(2) $(-1,2)$ を通るから

$$f(-1)=|1-a|=2$$
$$a=-1,3$$

$a>0$ より $a=3$.
$f(x)=|x^2+6x+3|$ だから, $f(x)=0$ とすると $x=-3\pm\sqrt{6}$.
$\alpha=3-\sqrt{6}$, $\beta=3+\sqrt{6}$ とすると, 面積は

$$\int_\alpha^\beta \left\{-(x^2+6x+3)\right\}dx=-\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$
$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}\left(2\sqrt{6}\right)^3=8\sqrt{6}$$

(3) $y=f(x)$ のグラフが常に $y=2x+b$ のグラフの上側にあるような b の値の範囲を求める.
$y=2x+b$ は傾きが 2 で y 切片が b の直線である.
$f(x)=|x^2+4x+2|$ だから, $f(x)=0$ とすると $x=-2\pm\sqrt{2}$.
$g(x)=x^2+4x+2$ とすると $g'(x)=2x+4$ だから, $g'(x)=2$ とすると $x=-1$.
$-1<-2+\sqrt{2}$ だから, 図 (略) より, $y=2x+b$ のグラフが $(-2+\sqrt{2},0)$ を通るとき, y 切片 b は最大で $b=4-2\sqrt{2}$.
よって, 求める b の範囲は, 図 (略) より, $b\leqq 4-2\sqrt{2}$.

$\boxed{3}$

(1) ab の値は

$a\backslash b$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

cd の値も同じ表になる.
ab の表のそれぞれの値に対して, $ab\geqq cd+25$ をみたす cd の表の値の個数は

$a\backslash b$	$1\sim4$	5	6
$1\sim4$	0	0	0
5	0	0	10
6	0	10	19

よって, 求める確率は

$$\frac{10+10+19}{6^4}=\frac{13}{432}$$

(2) $ab=cd$ をみたす cd の表の値の個数は

$a\backslash b$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	2	3	2	4
2	2	3	4	2	2	4
3	2	4	1	4	2	2
4	3	2	4	1	2	2
5	2	2	2	2	1	2
6	4	4	2	2	2	1

よって, 求める確率は

$$\frac{1\times5+2\times20+3\times3+4\times8}{6^4}=\frac{43}{648}$$

＜神戸大学 平成 27 年 前期＞

$\boxed{1}$

(1) B, C を通る直線の式は

$$y=\frac{s^2-t^2}{s-t}(x-s)+s^2$$
$$y=\frac{(s+t)(s-t)}{s-t}(x-s)+s^2$$
$$y=(s+t)x-st$$

これが, 点 A を通るから

$$2=s+t-st$$

(2) $u=\dfrac{s+t}{2}$, $v=\dfrac{s^2+t^2}{2}$ だから

$$st=2u-2$$
$$v=\frac{(s+t)^2-2st}{2}=\frac{(2u)^2}{2}u^2-(2u-2)=2u^2-2u+2$$

よって, $v=2u^2-2u+2$

(2)

$$v=2\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$$

$u=\dfrac{1}{2}$ となる u が存在すれば, 最小値 $v=\dfrac{3}{2}$.

$u=\dfrac{1}{2}$ とすると, $s+t=1$, $st=-1$ だから, 解と係数の関係より, s, t は方程式

$$x^2-x-1=0$$

の 2 つの解である.

$$x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

よって, $u=\dfrac{4}{1}$, $s=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, $t=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ で最小値 $v=\dfrac{3}{2}$

$\boxed{2}$

(1)

$$(\text{右辺})=\left[\frac{a_n}{2}t^2+b_nt\right]_{c_n}^{x+c_n}=\frac{a_n}{2}x^2+(b_n+a_nc_n)x$$
$$(\text{左辺})=a_{n+1}x^2+b_{n+1}x$$

よって,

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{2},\quad b_{n+1}=b_n+a_nc_n$$

$\{a_n\}$ は, 初項 $a_1=5$, 公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列だから

$$a_n=5\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

(2)

$$b_{n+1}=b_n+5\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

$n\geqq 2$ のとき

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}5\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}=7+5\cdot\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1}{\frac{3}{2}-1}$$
$$=10\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-3$$

$10\cdot1-3=7=b_1$ だから, $n=1$ でも成り立つ.

よって, すべての自然数 n で,

$$b_n=10\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-3$$

(2)

$$b_{n+1}=b_n+5n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$n\geqq 2$ のとき

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}5k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=7+5\sum_{k=1}^{n-1}k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

$S=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ とすると

$$S=1+2\cdot\frac{1}{2}+\cdots+(n-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}+(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$
$$\frac{1}{2}S=1\cdot\frac{1}{2}+2\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+(n-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}+(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

両辺を引いて

$$\frac{1}{2}S=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}-(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}-(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$=2-(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$S=4-2(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって, $n\geqq 2$ のとき

$$b_n=7+5S=27-10(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$27-10\cdot2\cdot1=7=b_1$ だから, $n=1$ でも成り立つ.

よって, すべての自然数 n で,

$$b_n=27-10(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$\boxed{3}$

(1) $b>c$ より, 3 辺が b, b, c の三角形は存在する.

$\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{c}$ だから, 3 辺が $\dfrac{1}{b}$, $\dfrac{1}{b}$, $\dfrac{1}{c}$ の三角形が存在する条件は

$$\frac{1}{b}\times2>\frac{1}{c}$$
$$2c>b$$

$b>c$ より

$$c<b<2c$$

$1\leqq c<b\leqq 7$ だから

c	1	2	3	4	5	6
b	×	3	4, 5	5, 6, 7	6, 7	7

よって, 9 個

(2) $a>b>c$ より, $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{c}$. （＊）をみたす条件は

$$b+c>a\cdots①,\quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}>\frac{1}{c}\cdots②$$

② より

$$\frac{1}{c}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\frac{2}{b}$$

だから, b, c は (1) の条件をみたす.

$1 \leqq c < b < a \leqq 7$ だから, ① をみたすものは

c	2	3	3	4	4	5
b	3	4	5	5	6	6
a	4	5, 6	6, 7	6, 7	7	7

これらはすべて②をみたす.
以上より, 9 通り.
(2)
(I) a, b, c がすべて等しいとき.
（＊）の三角形はともに正三角形となり, 条件をみたす.
よって, 7 個
(II) a, b, c のうち 2 個が等しいとき.
(i) $a = b > c$, $a = c > b$, $b = c > a$ のとき.
(1) より $9 \times 3 = 27$ (個)
(ii) $a = b < c$, $a = c < b$, $b = c < a$ のとき.
$a = b < c$ とすると, $\dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{c}$ だから, 3 辺が $\dfrac{1}{b}, \dfrac{1}{b}, \dfrac{1}{c}$ の三角形は存在する. 3 辺が b, b, c の三角形が存在する条件は $c < 2b$ だから, $b < c < 2b$. (1) で b, c を入れ替えた条件になるから, $a = b < c$ のときは 9 通り.
$a = c < b$, $b = c < a$ のときも同様に 9 通りだから, 全体で

$$9 \times 3 = 27 \text{ (個)}$$

(III) a, b, c がすべて異なるとき.
$a > b > c$ のとき (2) より 9 通り. a, b, c を大きい順に並べる並べ方は 6 通りあるから, 全体で

$$9 \times 6 = 54 \text{ (個)}$$

(I), (II), (III) より,

$$7 + 27 + 27 + 54 = 115 \text{ (個)}$$

＜大阪大学 平成 31 年 前期＞

$\boxed{1}$

(1) 与式を変形して

$$2\sqrt{2}\sin\left(x + y - \frac{\pi}{4}\right) \geqq \sqrt{2}$$

$$\sin\left(x + y - \frac{\pi}{4}\right) \geqq \frac{1}{2} \quad \cdots ①$$

$0 \leqq x \leqq \pi$, $0 \leqq y \leqq \pi$ より

$$-\frac{\pi}{4} \leqq x + y - \frac{\pi}{4} \leqq \frac{7}{4}\pi$$

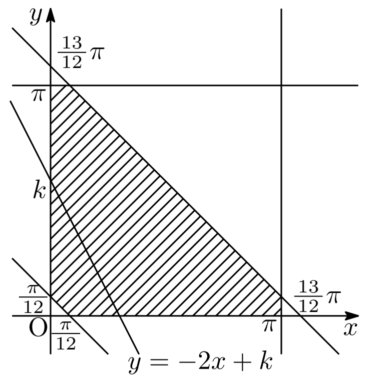
① より

$$-\frac{\pi}{6} \leqq x + y - \frac{\pi}{4} \leqq \frac{5}{6}\pi$$

$$-x + \frac{\pi}{12} \leqq y \leqq -x + \frac{13}{12}\pi$$

よって, 領域 D は図の斜線部分である. ただし, 境界線上を含む.

(図)



(2) $2x + y = k$ とすると

$$y = -2x + k \quad \cdots ②$$

②は傾きが -2 で, y 切片が k の直線を表す. 直線②が領域 D を通るような k の値を考える. 図 (略) より, y 切片 k が最大となるのは, 直線②が点 $\left(\pi, \dfrac{\pi}{12}\right)$ を通るときである. また, y 切片 k が最小となるのは, 直線②が点 $\left(0, \dfrac{5}{12}\pi\right)$ を通るときである. よって,

$x = \pi, y = \dfrac{\pi}{12}$ のとき最大値 $2x + y = \dfrac{25}{12}\pi$

$x = 0, y = \dfrac{5}{12}\pi$ のとき最小値 $2x + y = \dfrac{5}{12}\pi$

$\boxed{2}$

(1)

$$|p| = \begin{cases} p & (p \geqq 0) \\ -p & (p < 0) \end{cases}, \quad |p+1| = \begin{cases} p+1 & (p \geqq -1) \\ -p-1 & (p < -1) \end{cases}$$

(i) $p \geqq 0$ のとき.

$$x^2 - 2px + (2p - 1) = 0$$

$$(x - 1)(x - (2p - 1)) = 0$$

$$x = 1, 2p - 1$$

(ii) $-1 \leqq p < 0$ のとき.

$$x^2 - (p + 1) = 0$$

$$x^2 = p + 1$$

$-1 \leqq p < 0$ より $p + 1 \geqq 0$ だから

$$x = \pm\sqrt{p + 1}$$

(iii) $p<-1$ のとき.

$$x^2-2(p+1)x=0$$
$$x\,(x-2(p+1))=0$$
$$x=0,2(p+1)$$

(i), (ii), (iii) より, 常に実数解をもつ. (証明終)

(2)

(i) $p \geqq 0$ のとき.

$x=1,2p-1$ だから, $p=1$ のとき重解である. よって, $p \neq 1$.

$\alpha^2+\beta^2 \leqq 1$ より

$$1+(2p-1)^2 \leqq 1$$
$$(2p-1)^2 \leqq 0$$
$$p=\frac{1}{2}$$

これは, $p \geqq 0$, $p \neq 1$ をみたす.

(ii) $-1 \leqq p < 0$ のとき.

$p=-1$ のとき解は $x=0$ (重解) だから, $p \neq -1$.

$\alpha^2+\beta^2 \leqq 1$ より

$$(p+1)+(p+1) \leqq 1$$
$$p \leqq -\frac{1}{2}$$

$-1 \leqq p<0$, $p \neq -1$ より

$$-1<p \leqq -\frac{1}{2}$$

(iii) $p<-1$ のとき.

$x=0,2(p+1)$ だから, $p=-1$ のとき重解である. $p<-1$ はこれをみたす.

$\alpha^2+\beta^2 \leqq 1$ より

$$0+4(p+1)^2 \leqq 1$$
$$(p+1)^2 \leqq \frac{1}{4}$$
$$-\frac{1}{2} \leqq p+1 \leqq \frac{1}{2}$$
$$-\frac{3}{2} \leqq p \leqq -\frac{1}{2}$$

$p<-1$ より

$$-\frac{3}{2} \leqq p < -1$$

(i), (ii), (iii) より,

$$-\frac{3}{2} \leqq p<-1,\ -1<p \leqq -\frac{1}{2},\ p=\frac{1}{2}$$

$\boxed{3}$

(1) S_1, S_2 の中心をそれぞれ点 $\mathrm{C_1}$, $\mathrm{C_2}$ とし, 半径をそれぞれ r_1, r_2 とする. 与式より,

$$\mathrm{C_1}(1,1,1),\quad r_1=\sqrt{7}$$
$$\mathrm{C_2}(2,3,3),\quad r_2=1$$

このとき

$$\mathrm{C_1C_2}=\sqrt{(2-1)^2+(3-1)^2+(3-1)^2}=3$$

C 上に点 P をとると, P は S_1 上の点であり, S_2 上の点でもあるから,

$$\mathrm{PC_1}=r_1=\sqrt{7},\quad \mathrm{PC_2}=r_2=1$$

また, 三角形 $\mathrm{PC_1C_2}$ で余弦定理を用いて

$$\cos\angle\mathrm{PC_2C_1}=\frac{1+9-7}{2\cdot 1\cdot 3}=\frac{1}{2}$$

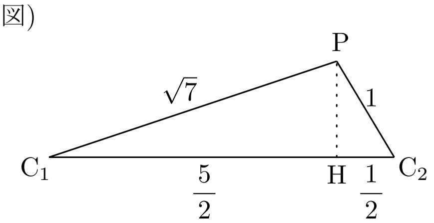
$0<\angle\mathrm{PC_2C_1}<\pi$ だから

$$\angle\mathrm{PC_2C_1}=\frac{\pi}{3}$$

2 つの球面の共通部分が円になるとき, この円は球の中心を結ぶ直線に垂直な面の上にある. よって, S_1 との共通部分が C となる球面の中心は直線 AB 上にある. 半径が最小になるのは, P から直線 $\mathrm{C_1C_2}$ に下ろした垂線の足を H としたとき, 半径が PH, 中心が H となるときである.

$$\mathrm{PH}=1\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\mathrm{C_2H}=1\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$
$$\mathrm{C_1H}=3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

(図)



よって, P は線分 $\mathrm{C_1C_2}$ を $5:1$ に内分する点だから

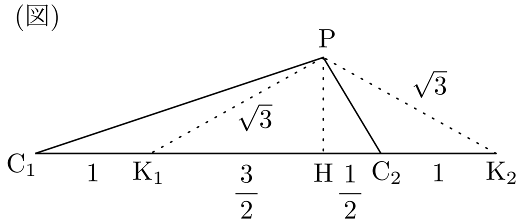
$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OC_1}}+5\,\overrightarrow{\mathrm{OC_2}}}{5+1}=\left(\frac{11}{6},\frac{8}{3},\frac{8}{3}\right)$$

よって, 求める球面は,

$$\left(x-\frac{11}{6}\right)^2+\left(y-\frac{8}{3}\right)^2+\left(z-\frac{8}{3}\right)^2=\frac{3}{4}$$

(2) 直線 $\mathrm{C_1C_2}$ 上で P からの距離が $\sqrt{3}$ となる点は 2 点あるので, $\mathrm{C_1}$ に近い方から $\mathrm{K_1}$, $\mathrm{K_2}$ とする.

(図)



$$\mathrm{PK_1}=\mathrm{PK_2}=\sqrt{3}$$
$$\mathrm{HK_1}=\mathrm{HK_2}=\sqrt{3-\mathrm{PH}^2}=\frac{3}{2}$$
$$\mathrm{C_1K_1}=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}=1,\quad \mathrm{C_2K_1}=3-1=2$$
$$\mathrm{C_1K_2}=\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=4,\quad \mathrm{C_2K_2}=4-3=1$$

$\mathrm{K_1}$ は線分 $\mathrm{C_1C_2}$ を $1:2$ に内分する点だから

$$\overrightarrow{\mathrm{OK_1}}=\frac{2\,\overrightarrow{\mathrm{OC_1}}+\overrightarrow{\mathrm{OC_2}}}{1+2}=\left(\frac{4}{3},\frac{5}{3},\frac{5}{3}\right)$$

$\mathrm{K_2}$ は線分 $\mathrm{C_1C_2}$ を $4:1$ に外分する点だから

$$\overrightarrow{\mathrm{OK_2}}=\frac{-\overrightarrow{\mathrm{OC_1}}+4\,\overrightarrow{\mathrm{OC_2}}}{4-1}=\left(\frac{7}{3},\frac{11}{3},\frac{11}{3}\right)$$

求める球面の中心は $\mathrm{K_1}$ または $\mathrm{K_2}$ で, 半径は $\sqrt{3}$ だから

$$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y-\frac{5}{3}\right)^2+\left(z-\frac{5}{3}\right)^2=3$$
$$\left(x-\frac{7}{3}\right)^2+\left(y-\frac{11}{3}\right)^2+\left(z-\frac{11}{3}\right)^2=3$$

< 大阪大学 平成 30 年 前期 >

$\boxed{1}$

(1) $x=\sin t-\cos t$ より

$$x^2=\sin^2 t-2\sin t\cos t+\cos^2 t=1-\sin 2t$$

よって, $f(t)=x(1-x^2)$

(2) 変形して

$$x=\sqrt{2}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$$

$0\leqq t\leqq\pi$ とすると,

$$-\frac{\pi}{4}\leqq t-\frac{\pi}{4}\leqq\frac{3}{4}\pi$$

だから

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1$$

よって,

$$-1\leqq x\leqq\sqrt{2}$$

$F(x)=f(t)$ とおく. $F'(x)=1-3x^2$ より $F'(x)=0$ とすると $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

x	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$F'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$F(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\nearrow$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	$-\sqrt{2}$

$-\dfrac{2}{3\sqrt{3}}=-\sqrt{\dfrac{4}{27}}>-\sqrt{2}$ だから, 増減表より

最大値 $f(t)=F\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$

最小値 $f(t)=F\left(\sqrt{2}\right)=-\sqrt{2}$

$\boxed{2}$

(1) 与式を変形して

$$\begin{aligned}\int_a^c(x-a)(x-b)\,dx&=\int_a^c(x-a)(x-a+a-b)\,dx\\&=\int_a^c\left\{(x-a)^2+(x-a)(a-b)\right\}dx\\&=\left[\frac{1}{3}(x-a)^3+\frac{(x-a)^2}{2}(a-b)\right]_a^c\\&=\frac{1}{3}(c-a)^3+\frac{(c-a)^2}{2}(a-b)\\&=\frac{1}{6}(c-a)^2(a-3b+2c)\end{aligned}$$

よって, $\displaystyle\int_a^c(x-a)(x-b)\,dx=0$ とすると

$$c=a\quad\text{または}\quad a+2c=3b$$

(i) $c=a$ の場合. 確率は $\dfrac{1}{6}$.

(ii) $c\neq a$ かつ $a+2c=3b$ の場合.

$b=1$ のとき 存在しない.

$b=2$ のとき $(a,c)=(4,1)$ の 1 通り.

$b=3$ のとき $(a,c)=(1,4),(5,2)$ の 2 通り.

$b=4$ のとき $(a,c)=(2,5),(6,3)$ の 2 通り.

$b=5$ のとき $(a,c)=(3,6)$ の 1 通り.

$b=6$ のとき 存在しない.

よって, 確率は

$$\frac{1+2+2+1}{6^3}=\frac{1}{36}$$

(I), (II) より, 求める確率は

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{36}=\frac{7}{36}$$

(2) 与式を変形して

$$2\log_a b-2\log_a c+\log_b c=1$$

$$2\log_a b-2\log_a c+\frac{\log_a c}{\log_a b}=1$$

$$2(\log_a b)^2-(1+2\log_a c)(\log_a b)+\log_a c=0$$

$$(2\log_a b-1)(\log_a b-\log_a c)=0$$

$$\log_a b^2=1\ \text{または}\ \log_a b=\log_a c$$

$$b^2=a\ \text{または}\ b=c$$

(i) $b=c$ の場合.

$a\geqq 2,\ b\geqq 2$ だから, 確率は $\dfrac{5^2}{6^3}$ である.

(ii) $b^2=a$ の場合.

$(a,b)=(4,2)$ のときで, 確率は $\dfrac{1}{36}$

(iii) $b^2=a$ かつ $b=c$ の場合.

$(a,b,c)=(4,2,2)$ のときのみで, 確率は $\dfrac{1}{6^3}$

(i), (ii), (iii) より, 求める確率は

$$\frac{5^2}{6^3}+\frac{1}{36}-\frac{1}{6^3}=\frac{5}{36}$$

$\boxed{3}$

(1) $\triangle$ABC で, AP : PB = AQ : PC だから PQ//BC. $\triangle$FCE で, FR : RD = FS : SE だから RS//DE. 四角形 BCDE は正方形だから BC//DE. よって, PQ//RS だから, 4 点 P, Q, R, S は同一平面上にある.

(2) P, Q, R, S の座標は

$$\mathrm{P}(1-s,0,s),\qquad \mathrm{Q}(0,1-s,s),$$
$$\mathrm{R}(-1+t,0,-t),\qquad \mathrm{S}(0,-1+t,-t)$$

L, M は PQ, RS の中点だから

$$\mathrm{L}\left(\frac{1-s}{2},\frac{1-s}{2},s\right),\quad \mathrm{M}\left(\frac{-1+t}{2},\frac{-1+t}{2},-t\right)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{LM}&=\sqrt{\left(\frac{1-s}{2}-\frac{-1+t}{2}\right)^2\times 2+(s+t)^2}\\&=\sqrt{\frac{(2-(s+t))^2}{2}+(s+t)^2}\\&=\sqrt{\frac{3}{2}\left(s+t-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{4}{3}}\end{aligned}$$

$0<s+t<2$ だから, $s+t=\dfrac{2}{3}$ のとき LM は最小で $m=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

(3) $\mathrm{LM}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ のとき, (2) より $s+t=\dfrac{2}{3}$ である. $0<s<1$, $0<t<1$ より, $0<s<\dfrac{2}{3}$. 4 点 P, Q, R, S を通る平面を π とし, π と BE, CD の交点をそれぞれ T, U とする. 正八面体の π による切り口は六角形 PQURST で, この面積が X である. PQ//BC であり, TU は π と正方形 BCDE の共通部分だから,

$$\mathrm{PQ}//\mathrm{TU}//\mathrm{BC}$$

特に, BCDE が正方形だから,

$$\overrightarrow{\mathrm{TU}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(-1,1,0)$$

TU と PR の交点を N とする．N は PR 上の点だから，定数 k を用いて $\overrightarrow{\mathrm{PN}} = k\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ と表せる．

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = (s+t-2, 0, -s-t) = \left(-\frac{4}{3}, 0, -\frac{2}{3}\right)$$

より

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + k\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \left(1-s-\frac{4}{3}k, 0, s-\frac{2}{3}k\right)$$

TU は xy 平面上にあるから，N も xy 平面上にある．よって，N の z 座標は 0 だから $s = \dfrac{2}{3}k$ である．従って

$$\mathrm{PN} : \mathrm{NR} = k : 1-k = \frac{3}{2}s : 1-\frac{3}{2}s$$

六角形 PQURST でを 2 つの台形 PQUT, RSTU に分けて考える．それぞれの台形の高さの比は，PN : NR．また，$\overrightarrow{\mathrm{LM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = 0$ だから $\mathrm{LM} \perp \mathrm{PQ}$ なので，$\mathrm{LM} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ より

$$\text{台形 PQUT の高さ} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{2}s = \sqrt{3}s$$

$$\text{台形 RSTU の高さ} = \frac{2}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}s = \left(\frac{2}{3} - s\right)\sqrt{3}$$

また，

$$\mathrm{PQ} = \sqrt{2 \cdot (1-s)^2} = (1-s)\sqrt{2}$$

$$\mathrm{RS} = \sqrt{2 \cdot (-1+t)^2} = (1-t)\sqrt{2} = \left(s + \frac{1}{3}\right)\sqrt{2}$$

$$\mathrm{TU} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

よって

$$\begin{aligned}\text{台形 PQUT} &= \frac{(1-s)\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3}s \\ &= \frac{\sqrt{6}}{2}(2-s)s\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{台形 RSTU} &= \frac{\left(s+\frac{1}{3}\right)\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2}\left(\frac{2}{3} - s\right)\sqrt{3} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{2}\left(\frac{4}{3} + s\right)\left(\frac{2}{3} - s\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X &= \frac{\sqrt{6}}{2}\left((2-s)s + \left(\frac{4}{3} + s\right)\left(\frac{2}{3} - s\right)\right) \\ &= -\sqrt{6}\left(s - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{5}{9}\sqrt{6}\end{aligned}$$

$0 < s < \dfrac{2}{3}$ だから，$s = t = \dfrac{1}{3}$ のとき最大値 $X = \dfrac{5}{9}\sqrt{6}$.