数学　問題・解答用紙　＜No.1＞

1　(20 点)

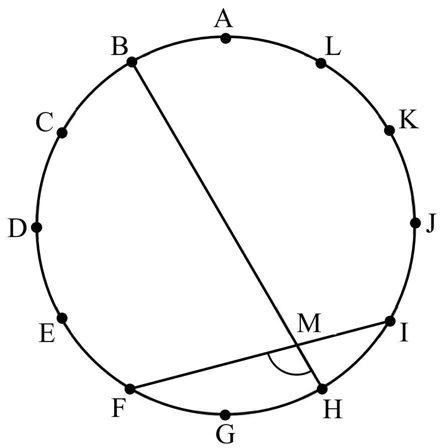
次の$\boxed{}$を埋めよ。

(1)　$3x^3y-6x^2y^2-24xy^3$ を因数分解すると，$\boxed{3xy(x+2y)(x-4y)}$ である。

(2)　$\sqrt{\dfrac{756}{n}}$ が整数となるような自然数 n をすべて求めると，

$\boxed{21,\ 84,\ 189,\ 756}$ である。

(3)　図のように円周を 12 等分した点を順に A, B, …, L とし，線分 BH と FI の交点を M とする。図の∠FMH を求めると，$\boxed{105}$° である。



(4)　$x=\sqrt{7}+\sqrt{6}$, $y=\sqrt{7}-\sqrt{6}$ のとき，

$\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ の値を求めると，$\boxed{2\sqrt{7}}$ である。

2　(20 点)

大・中・小の 3 個のサイコロを同時に投げる。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　出る目の積が奇数である確率を求めよ。

(2)　出る目の和が 10 となる確率を求めよ。

(3)　少なくとも 2 個は 1 の目が出る確率を求めよ。

(1)　3 つのサイコロの目の出方は全部で$6\times6\times6=216$通りあり，
これらは同様に確からしい。
出る目の積が奇数となる場合は，3 つのサイコロの目がすべて奇数のときなので，$3\times3\times3=27$通りある。
よって，求める確率は，$\dfrac{27}{216}=\dfrac{1}{8}$ …答

(2)　出る目の和が 10 となる場合の目の組合せは，
(1,3,6), (1,4,5), (2,2,6), (2,3,5), (2,4,4), (3,3,4)
すべて異なる目が出る場合は，それぞれ 6 通り
2 つだけ同じ目が出る場合は，それぞれ 3 通りあるので，
求める確率は，$\dfrac{3\times6+3\times3}{216}=\dfrac{1}{8}$ …答

(3)　1 の目が 3 個出る場合は(1,1,1)の 1 通り
1 の目が 2 個出る場合，出る目の組合せは
(1,1,2), (1,1,3), …, (1,1,6)の 5 通りあり，
それぞれ 3 通りずつ目の出方があるので$5\times3=15$通り
よって，求める確率は，$\dfrac{15+1}{216}=\dfrac{2}{27}$ …答

受験番号		小計	

数学　問題・解答用紙　＜No.2＞

3（20 点）

放物線 $y=3x^2$ …①と放物線 $y=\frac{1}{3}x^2$…②がある。放物線①上に点 A をとる。ただし，点 A の x 座標は正とする。点 A を通り y 軸に平行な直線と放物線②との交点を B とし，点 A を通り x 軸に平行な直線と放物線②との交点のうち x 座標が正である方を C とする。さらに点 C を通り y 軸に平行な直線と，点 B を通り x 軸に平行な直線との交点を D とする。点 A の x 座標を t として，次の問いに答えよ。

(1) 点 D の座標を t で表せ。

(2) 四角形 ABDC が正方形となるとき，t の値を求めよ。

(3) 直線 $y=2x$ が四角形 ABDC の面積を 2 等分するとき，t の値を求めよ。

(1) A の座標は$(t,3t^2)$なので，

B の x 座標は t

よって，B の y 座標は $\frac{1}{3}t^2$

D の y 座標も $\frac{1}{3}t^2$

また，C の y 座標は$3t^2$だから，

C の x 座標を u とすると，

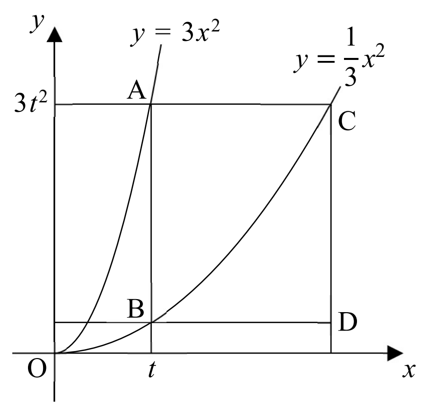
$3t^2=\frac{1}{3}u^2$

これを解いて，$u=\pm 3t$

$u>0$より，$u=3t$

D の x 座標も $3t$

よって，$\mathrm{D}(3t,\frac{1}{3}t^2)$…答



(2) 四角形 ABDC は長方形なので，

これが正方形となる条件は，$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$である。

よって，$3t^2-\frac{1}{3}t^2=3t-t$

$\therefore 8t^2=6t$

$t\neq 0$より，$8t=6$　$\therefore t=\frac{3}{4}$…答

(3) 直線$y=2x$が長方形 ABDC の面積を 2 等分する条件は，

直線$y=2x$が 2 本の対角線の交点を通るときである。

対角線は互いの中点で交わるので，

交点の座標は $(2t,\frac{5}{3}t^2)$ である。

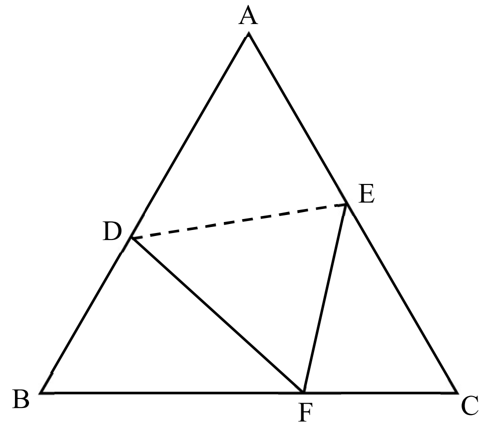
$y=2x$がこの点を通るから，$\frac{5}{3}t^2=4t$　$\therefore 5t^2=12t$

$t\neq 0$より，$5t=12$　$\therefore t=\frac{12}{5}$…答

受験番号		小計	

数学　問題・解答用紙　＜No.3＞

4　(20 点)



　正三角形 ABC を右の図のように線分 DE を折り目として折り返したところ，頂点 A が辺 BC 上の点 F に重なった。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\triangle BFD \backsim \triangle CEF$　であることを証明せよ。

(2)　$BD = 5\text{cm}$，$BF = 8\text{cm}$ であるとき，

　(a)　線分 DF の長さを求めよ。

　(b)　$\triangle ADE$ と $\triangle BFD$ の面積の比を求めよ。

(1)　$\triangle BFD$ と $\triangle CEF$ について，

$\triangle ABC$ は正三角形なので，内角はすべて 60°　である。

よって，$\angle B = \angle C = 60^\circ$　…①

三角形の 2 つの内角の和は残り一つの外角に等しいので，

$\triangle CEF$ において $\angle C + \angle FEC = \angle EFB$

よって，$\angle FEC = \angle EFB - 60^\circ$　…②

一方，$\triangle FDE$ は $\triangle ADE$ を DE で折り返したものなので，

$\triangle FDE \equiv \triangle ADE$ だから，$\angle EFD = \angle A = 60^\circ$

したがって，$\angle DFB = \angle EFB - 60^\circ$　…③

②③より，$\angle DFB = \angle FEC$…④

①④より，2 組の角がそれぞれ等しいので，

$\triangle BFD \backsim \triangle CEF$（証明終）

(2)

(a)　点 F より線分 BD に垂線 FH を引く。

$\triangle FBH$ は $\angle B = 60^\circ$　$\angle BHF = 90^\circ$

の直角三角形なので，$BF : BH : FH = 2 : 1 : \sqrt{3}$ である。

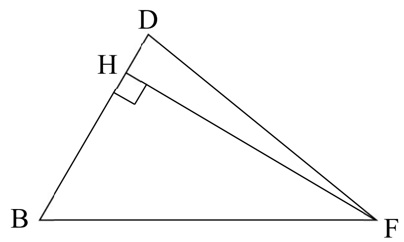
$BF = 8\text{cm}$ だから，$BH = 4\text{cm}$, $FH = 4\sqrt{3}\text{cm}$ となる。

よって，$DH = 5 - 4 = 1\text{cm}$

$\triangle DHF$ も直角三角形なので，三平方の定理より，

$DF^2 = DH^2 + FH^2 = 1 + 48 = 49$

$DF > 0$ より，$DF = 7\text{cm}$…答



(b)　$AB = BD + DA = BD + DF = 12\text{cm}$ だから，

$\triangle ABC$ の一辺の長さは 12cm

$FC = BC - BF = 4\text{cm}$

よって，$\triangle BFD$ と $\triangle CEF$ の相似比は 5:4 だから，$AE = 7 \times \frac{4}{5} = \frac{28}{5}$

$$\triangle ADE = \frac{7}{12} \times \frac{28}{5\times12} \triangle ABC = \frac{49}{180} \triangle ABC$$

$$\triangle BFD = \frac{8}{12} \times \frac{5}{12} \triangle ABC = \frac{5}{18} \triangle ABC$$

よって，$\triangle ADE : \triangle BFD = \frac{49}{180} : \frac{5}{18} = 49 : 50$　…答

受験番号		小計	

数学　問題・解答用紙　＜No.4＞

5 （20 点）

一辺の長さが 12cm の正四面体 ABCD のすべての面に接するような球がある。辺 BC の中点を E とし，正四面体の頂点 A から△BCD に下ろした垂線を AH とする。このとき，H は線分 DE 上にあり，$DH:HE = 2:1$である。また，球の中心 O は線分 AH 上にある。次の問いに答えよ。

(1) 線分 AE と AH の長さを求めよ。

(2) 球の半径を求めよ。

(3) 辺 AD 上に$AX = 4\text{cm}$となるように点 X をとる。OX の長さを求めよ。

(4) (3)のとき，辺 AB，AC 上に，それぞれ Y, Z を，$AY = AZ$となるようにとったところ，平面 XYZ が球に点 I で接した。このとき，XI の長さを求めよ。

(1) △ABC，△DBC はともに正三角形なので，

$$AE = DE = 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}\text{cm}$$

よって，$DH = 6\sqrt{3} \times \frac{2}{3} = 4\sqrt{3}\text{cm}$

$\angle AHD = 90^\circ$ だから，

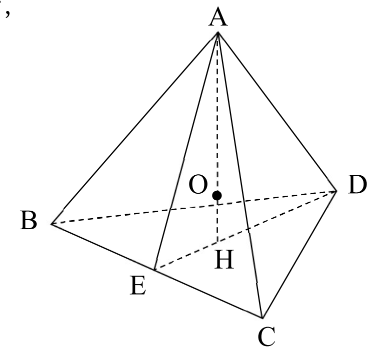
三角形 AHD において三平方の定理より，

$12^2 = AH^2 + (4\sqrt{3})^2$

よって，$AH^2 = 96$

$AH > 0$より，$AH = 4\sqrt{6}\text{cm}$

$AE = 6\sqrt{3}\text{cm}$，$AH = 4\sqrt{6}\text{cm}$…答



(2) △AEH と△DOH において，

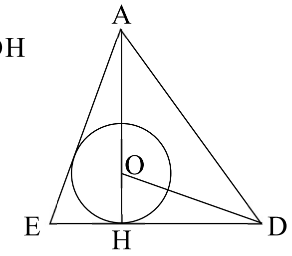
仮定より，$\angle AHE = \angle DHO = 90^\circ$

図の対称性より，$\angle EAH = \angle ODH$

よって，2 組の角がそれぞれ等しいので△AEH∽△DOH

したがって，

$$OH = DH \times \frac{EH}{AH} = 4\sqrt{3} \times \frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{6}} = \sqrt{6}\text{cm}…答$$



(3) 点 E から AD に下ろした垂線を EF とする。

対称性より，F は AD の中点であり，点 O は EF 上にある。

$AF = 12 \div 2 = 6\text{cm}$，$FX = 6 - 4 = 2\text{cm}$，

$AO = 4\sqrt{6} - \sqrt{6} = 3\sqrt{6}\text{cm}$

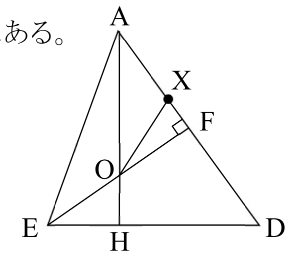
△AFO において三平方の定理より，

$OF^2 = AO^2 - AF^2 = (3\sqrt{6})^2 - 6^2 = 18$

△XFO において三平方の定理より，

$OX^2 = OF^2 + FX^2 = 18 + 2^2 = 22$

$OX > 0$より，$OX = \sqrt{22}\text{cm}$…答



(4) 三角形 XIO において，(2)，(3)より，

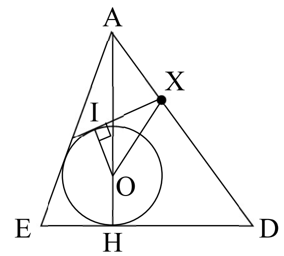
$OI = \sqrt{6}\text{cm}$，$OX = \sqrt{22}\text{cm}$

また，$\angle OIX = 90^\circ$ だから，

三平方の定理より，

$XI^2 = OX^2 - OI^2 = 22 - 6 = 16$

$XI > 0$より，$XI = 4\text{cm}$…答



受験番号		小計		合計	