数学　問題・解答用紙　＜No.1＞

1　(40 点)

次の $\boxed{}$ をうめよ。

(1) 方程式 $\frac{3}{2}x^2 - x = 2x^2 + 2x - \frac{1}{2}$ の解は $x = \boxed{-3 \pm \sqrt{10}}$ である。

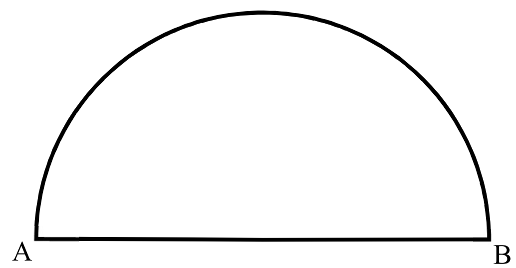
(2) $\sqrt{2020}$ の小数部分を p とすると，$p^2 + 88p$ の値は $\boxed{84}$ である。

(3) xy 平面上の 3 本の直線 $\ell : y = x + 4$, $m : y = -x$, $n : x = \sqrt{2}$ を考える。

ℓ, m, n によって囲まれた三角形の面積は $\boxed{6 + 4\sqrt{2}}$ である。

(4) 長さが 10 である線分 AB を直径とする半円があり，この半円の弧上(両端の A, B は除く)を点 P が動くものとする。また，半円の外部で，半直線 BP 上に∠PAQ = 60° をみたす点 Q をとる。

このとき，∠AQB の大きさは $\boxed{30^\circ}$ である。また，線分 AB の中点を M とするとき，線分 MQ の長さの最大値は $\boxed{10 + 5\sqrt{3}}$ である。



受験番号		小計	

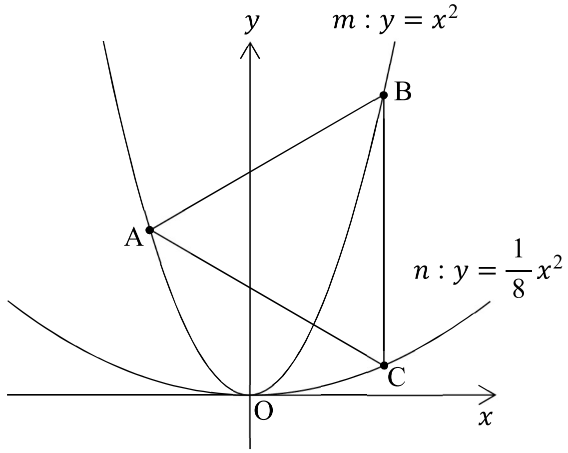
数学　問題・解答用紙　＜No.2＞

2　(15 点)

図のように，2 つの放物線 $m : y = x^2$，$n : y = \frac{1}{8}x^2$ がある。2 点 A，B をm上にとり，点 C をn上にとる。ただし，A のx座標は負，B のx座標は正であり，2 点 B，C のx座標は等しいとする。次の問いに答えよ。

(1)　B のx座標を t とする。三角形 ABC がAB = ACの二等辺三角形となるとき，A の座標を t を用いて表せ。

(2)　三角形 ABC が正三角形となるとき，B の座標を求めよ。



(1) B$(t,\ t^2)$，C$\left(t,\ \frac{1}{8}t^2\right)$ と表せる。A のy座標は BC の中点と等しいから

$$y = \frac{1}{8}t^2 + \left(t^2 - \frac{1}{8}t^2\right) \div 2 = \frac{9}{16}t^2$$

A はm上の点だから $\frac{9}{16}t^2 = x^2$　とすると

$x < 0,\ t > 0$ だから　$x = -\frac{3}{4}t$

よって　　　　A$\left(-\frac{3}{4}t,\ \frac{9}{16}t^2\right)$

(2)
BC の中点を M とすると，AM : BM $= \sqrt{3} : 1$ だから

$$\left(t + \frac{3}{4}t\right) : \left(\frac{9}{16}t^2 - \frac{1}{8}t^2\right) = \sqrt{3} : 1$$

$$\frac{7}{4}t : \frac{7}{16}t^2 = \sqrt{3} : 1$$

$t > 0$だから　　　$4 : t = \sqrt{3} : 1$

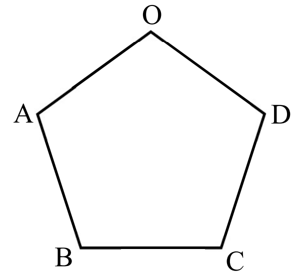
$$\sqrt{3}t = 4$$

$$t = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$$

$$\mathrm{B}\left(\frac{4\sqrt{3}}{3},\ \frac{16}{3}\right)$$

3　(15 点)

正五角形 OABCD と，その頂点を反時計回りに動く 3 点 P，Q，R がある。P，Q，R は，初め頂点 O にあり，さいころを 3 回振って，1 回目に出た目の数だけ P を，2 回目に出た目の数だけ Q を，3 回目に出た目の数だけ R を移動させる。次の問いに答えよ。



(1)　P，Q，R が 3 点とも重なるような目の出方は何通りあるか。

(2)　P，Q，R が三角形の 3 頂点とならないような目の出方は何通りあるか。

(1)・ A で重なるとき

3 回とも，1 か 6 の目が出るときで，

$2^3 = 8$ 通り

・ A 以外で重なるとき

3 回とも 2，3，4，5 のいずれかの同じ目が出るときで，

$1 \times 4 = 4$ 通り

合わせると，　$8 + 4 = 12$ 通り

(2) 三角形ができる場合を考える

P，Q，R が異なる 3 点に移動するときだから，

3 回とも異なる目が出る，かつ，1 と 6 が出るときはどちらか一方だけという場合である

3 回とも異なる目が出る場合は　$6 \times 5 \times 4 = 120$ 通り

このうち，1 と 6 の両方が出る場合は，1 と 6 以外の目の選び方 4 通りで，

3 つの目が何回目に出るかの並び方が　$3 \times 2 \times 1 = 6$ 通り　だから，

$4 \times 6 = 24$ 通り

よって，三角形ができる場合は　$120 - 24 = 96$ 通り

目の出方は全部で6^3通りだから，三角形ができない場合は，

$6^3 - 96 = 120$ 通り

受験番号		小計	

数学　問題・解答用紙　＜No.3＞

4　(15 点)

70 以上 100 以下の整数について，次の問いに答えよ。

(1)　正の約数の個数が 2 個であるものをすべて求めよ。(答えのみでよい)

(2)　正の約数の個数が 12 個であるものをすべて求めよ。

(1)

71，73，79，83，89，97

(2)

12 は，いくつかの自然数の積で表すと，

$$6\times 2,\quad 4\times 3,\quad 3\times 2\times 2$$

と表せる

よって，p，q，r を異なる素数とすると，条件をみたすもので，

p^{11} の形であらわされるものはなく，

$p^5\times q$ の形であらわされるものは，

$$2^5\times 3=96$$

$p^3\times q^2$ の形であらわされるものは，

$$2^3\times 3^2=72$$

$p^2\times q\times r$ の形であらわされるものは，

$$2^2\times 3\times 7=84$$

$$3^2\times 2\times 5=90$$

である

以上より，

72，84，90，96

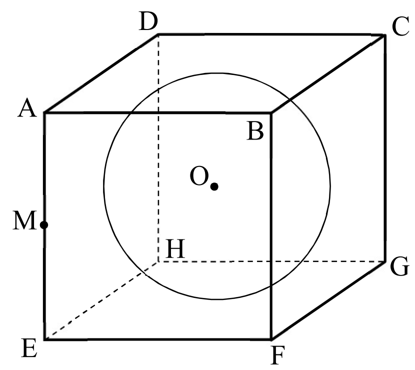
5　(15 点)

一辺の長さが 4 の立方体 ABCD-EFGH のすべての面に接する球がある。辺 AE の中点を M，球の中心を O とする。次の問いに答えよ。

(1)　五面体 ABCFM の体積を求めよ。

(2)　三角形 CFM の面積を求めよ。

(3)　四面体 OCFM の体積を求めよ。



(1)

底面が四角形 ABFM の四角すい C-ABFM の体積と考えて，

$$\frac{(2+4)\times 4}{2}\times 4\times\frac{1}{3}=16$$

(2)

$$\mathrm{FM}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5},\quad \mathrm{CF}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2},\quad \mathrm{CM}=\sqrt{2^2+\left(4\sqrt{2}\right)^2}=6$$

F から直線 CM に下ろした垂線の足を H として，MH $=x$ とすると，

$$\mathrm{FH}^2=\left(2\sqrt{5}\right)^2-(6-x)^2=\left(4\sqrt{2}\right)^2-x^2$$

これを解くと $x=4$ だから，　$\mathrm{FH}^2=\left(4\sqrt{2}\right)^2-2^2=16$

よって，　FH $=4$ だから，　$\triangle\mathrm{CFM}=6\times 4\div 2=12$

(3)

直線 CE 上に点 O があるので，三角すい C-FME の体積を V_1，

三角すい O-FME の体積を V_2 とすると，求める体積は

$$V_1-V_2=2\times 4\times\frac{1}{2}\times 4\times\frac{1}{3}-2\times 4\times\frac{1}{2}\times 2\times\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$$

受験番号		小計		合計	